УДК 522.59 : 522.62

О РОЛИ ЧИСЛА ОТСЧЕТОВ ПРИ КООРДИНАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ НА ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ СО СВЕРХДЛИННЫМИ БАЗАМИ

В. С. Итенберг, А. М. Финкельштейн

В работе показано, что на базах, больших внешнего масштаба двумерной турбулентности, точность угловых определений по частоте интерференции и временной задержке может быть одного порядка, если принять во внимание специфику радиоинтерферометрических методов измерения координат, состоящую в накоплении большего числа отсчетов τ и F для одного источника в разных часовых углах.

It is shown that with the bases larger than outer scale of two-dimensional turbulence, an accuracy of angular determination according to the interference frequency and the time delay can be of the same order if the specific of radiointerferometric methods for coordinate measurements is taken into consideration, which consists in accumulation of the large number of readings τ and F for one source in different hour angles.

1. В существующих радиоинтерферометрических методах измерения координат радиоисточников для разрешения соответствующих систем условных уравнений необходимо наблюдать группу источников некоторого минимального объема (от трех до девяти в зависимости от принятой методики) в разных часовых углах [1]. Таким образом, реальная программа радиоинтерферометричеческих измерений представляет собой серию некоторого числа N отсчетов временной задержки τ или частоты интерференции F относительно короткой длительности T, разделенных относительно большим промежутком времени ΔT. Очевидно, что накопление большого числа отсчетов τ и F способствует уменьшению величины их случайных ошибок, которые обусловлены флуктуационными шумами аппаратуры (при больших N, как $1/\sqrt{N}$).

Рассмотрим, какую роль играет накопление N отсчетов τ и F в уменьшении их случайных ошибок, вызванных флуктуационными эффектами турбулентной тропосферы. Пусть проводится N наблюдений источника длительностью T, которые повторяются с постоянным периодом $\mu = T + \Delta T$ (условие $\mu = \text{const}$ всегда соответствует оптимальному режиму наблюдения источника на интервале его общего времени видимости — $T + N\mu$).

Если $W_l(\omega)$ — спектральная плотность флуктуаций электрической толщины тропосферы, которая связана со структурной функцией эйконала преобразованием Фурье

$$D_l(x) = 4\int_0^\infty (1 - \cos\omega x)\, W_l(\omega)\, d\omega, \tag{1}$$

то спектральная плотность флуктуаций разности электрических длин $\delta l = l_2 - l_1$ в двух точках, находящихся на расстоянии ρ, равна

$$W_{\delta l}(\omega) = 4\sin^2\frac{\omega\rho}{2v}\, W_l(\omega), \tag{2}$$

где v — характерная скорость переноса тропосферных неоднородностей, а спектральная плотность скорости изменения разности электрических длин $\dot{\delta l} = d\delta l/dt$;

$$W_{\dot{\delta l}} = 4\omega^2 \sin^2\frac{\omega\rho}{2v}\, W_l(\omega). \tag{3}$$

Временное осреднение длительности T сводится к подавлению флуктуаций с частотами $\omega \geqslant 1/T$, так что

$$W^T(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right)^2 W(\omega), \tag{4}$$

и, следовательно, временное накопление фильтрует высокочастотные флуктуации, а пространственная фильтрация (2) подавляет низкочастотные компоненты спектра.

Сдвиг сигнала во времени на величину μ ($\mu \geqslant T$) эквивалентен на спектральном языке умножению его спектра на величину $\exp(-j\mu\omega)$. Таким образом, суммарная спектральная плотность при N отсчетах длительностью T каждый — $W^{T,\mu}(\omega)$ будет равна спектральной плотности единичного отсчета длительностью T — $W^T(\omega)$, умноженной на множитель вида

$$\frac{1}{N^2}\left|1 + e^{-j\mu\omega} + \ldots + e^{-j(N-1)\mu\omega}\right|^2 = N + 2\sum_{k=0}^{N-1} k\cos(N-k)\mu\omega, \tag{5}$$

а соответствующая среднеквадратичная ошибка будет

$$\sigma^2(T, \mu) = 2\int_0^\infty W^{T,\mu}(\omega)\, d\omega. \tag{6}$$

Используя (1)—(6), перейдем к получению оценок для тропосферных ошибок при измерении временной задержки σ_τ и частоты интерференции σ_F.

2. Измерение временной задержки. Принимая во внимание уравнения (1), (2), (4)—(6), будем иметь:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{c^2NT^2}\left\{-2S(T) - 2S(\rho/v) + S\left(T + \frac{\rho}{v}\right) + S\left(T - \frac{\rho}{v}\right) + \right.$$
$$+ \sum_{k=0}^{N-1} k\left[\frac{4}{N}S(\mu(N-k)) - \frac{2}{N}S\left(\frac{\rho}{v} + \mu(N-k)\right) - \frac{2}{N}S\left(\frac{\rho}{v} - \mu(N-k)\right) - \right.$$
$$- \frac{2}{N}S(T + \mu(N-k)) - \frac{2}{N}S(T - \mu(N-k)) + \frac{1}{N}S\left(T + \frac{\rho}{v} + \mu(N-k)\right) +$$
$$+ \frac{1}{N}S\left(T + \frac{\rho}{v} - \mu(N-k)\right) + \frac{1}{N}S\left(T - \frac{\rho}{v} + \mu(N-k)\right) +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{N}S\left(T - \frac{\rho}{v} - \mu(N-k)\right)\right]\right\}, \tag{7}$$

где

$$S(x) = \int_0^x (x - t)\, D(t)\, dt \tag{8}$$

и c — скорость света.

Для интерферометров со сверхдлинными базами (база ρ больше внешнего масштаба двумерной турбулентности $L_2 = 3000$ км [2]) $\rho/v \gg T$, $N\mu$ даже для незаходящих источников, так что

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{c^2NT^2}\left\{-2S(T) + NT^2D(\rho) - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} k\left[S(T + \mu(N-k)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + S(T - \mu(N-k)) - 2S(\mu(N-k))\right]\right\}, \tag{9}$$

и, поскольку $\mu \gg T$, то

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{c^2}D(\rho) - \frac{2}{c^2NT^2}S(T) - \frac{2}{c^2N^2}\sum_{k=0}^{N-1} kD(\mu(N-k)). \tag{10}$$

Примем для оценок модель структурной функции, введенную в работе [2]: $T=2$ мин, $\mu=0.5$ ч, $N=20$ и $\rho=L_2=3000$ км. Тогда $c\sigma_\tau\approx 8.2$ см, в то время как $\sqrt{D(\rho)}\approx 8.7$ см. Отсюда видно, что увеличение числа отсчетов при измерении временной задержки на базах, больших внешнего масштаба двумерной турбулентности, не ведет к уменьшению тропосферной ошибки, так как отдельные сеансы оказываются сильно скоррелированными. Именно этим объясняется тот факт, что при координатных определениях, использующих временную задержку, временное накопление не проявляет себя на базах $\rho\geqslant L_2$ [3].

Отдельные сеансы становятся статистически независимыми, если $\mu\gg\rho/v\gg T$, и тогда

$$\sigma_\tau^2=\frac{1}{N}D(\rho)-\frac{2}{c^2NT^2}S(T). \tag{11}$$

Эта ситуация соответствует тому случаю, когда период μ становится больше характерного времени корреляции тропосферных неоднородостей масштаба L_2, которое составляет $t_{L_2}\approx 3.5$ сут.

3. Измерение частоты интерференции. Принимая во внимание уравнения (1), (3)—(6), будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_F^2=\frac{1}{\lambda^2NT^2}\Bigg\{&2D(vT)+2D(\rho)-D(vT+\rho)-D(vT-\rho)+\\+\sum_{k=0}^{N-1}k\Big[&-\frac{4}{N}D(\mu v(N-k))+\frac{2}{N}D(Tv+\mu v(N-k))+\frac{2}{N}D(Tv-\mu v(N-k))-\\&-\frac{1}{N}D(Tv+\rho+\mu v(N-k))-\frac{1}{N}D(Tv+\rho-\mu v(N-k))-\\&-\frac{1}{N}D(Tv-\rho+\mu v(N-k))-\frac{1}{N}D(Tv-\rho-\mu v(N-k))\Big]\Bigg\},\end{aligned} \tag{12}$$

где λ — длина волны принимаемого излучения.

Если $\rho/v\gg\mu N,\ T$, то

$$\begin{aligned}\sigma_F^2=\frac{1}{\lambda^2NT^2}\Bigg\{&2D(vT)-ND''(\rho)T^2+\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}k\,[D(vT+\mu v(N-k))+\\&+D(vT-\mu v(N-k))-2D(\mu v(N-k))\Bigg\},\end{aligned} \tag{13}$$

и при $\mu\gg T$

$$\sigma_F^2=\frac{1}{\lambda^2NT^2}\left\{2D(vT)-ND''(\rho)T^2+\frac{2}{N}T^2\sum_{k=0}^{N-1}kD''(\mu v(N-k))\right\}. \tag{14}$$

Отсюда видно, что увеличение числа отсчетов на базах $\rho\geqslant L_2$ эффективно уменьшает тропосферную ошибку, поскольку уже при $\mu\gg T$ отдельные отсчеты становятся практически статистически независимыми. В частности, для рассмотренного выше примера $\sigma_F(T,\mu)\approx 1.5\cdot 10^4$ Гц на волне $\lambda=5$ см, в то время как $\sigma_F(T)\approx 6.8\cdot 10$ Гц.

Как было показано в работе [4], координатные определения, использующие частоту интерференции F, значительно более чувствительны к флуктуационным шумам тропосферы и поэтому значительно менее точны, нежели координатные определения, использующие временную задержку τ. Однако указанная выше особенность частотных измерений показывает, что тропосферные ограничения при координатных измерениях, использующих как τ, так и F, могут оказаться одного порядка, если учесть тот факт, что в сеансе длительностью от полусуток до суток можно сделать достаточно большое число отсчетов частоты интерференции. Например, для рассмотренного числового примера на базе $\rho=3000$ км ошибка определения углового положения источника по временной задержке $\sigma_\theta^\tau\approx c\sigma_\tau/\rho\approx 0.''006$, а по частоте интерференции $\sigma_\theta^F\approx$

$\approx\lambda\sigma_F/(\Omega\rho)\approx0''007$ ($\Omega=7.3\cdot10^{-5}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли).

Нетрудно показать, что это заключение в равной степени применимо и к тем алгоритмам, в которых при координатных определениях используются дифференциальные значения τ и F. В частности, применительно к методу дуг [5] это означает, что программы, использующие совместные измерения τ и F, могут быть столь же эффективны, как и программы, использующие только измерения τ.

Литература

1. Дравских А. Ф., Финкельштейн А. М. Радиоинтерферометрия как средство решения основных задач астрометрии и астрофизики. — В кн.: Астрометрия и геодинамика. Киев: Наукова думка, 1980, с. 137—158.
2. Стоцкий А. А. Крупномасштабные флуктуации фазы при распространении радиоволн в турбулентной атмосфере. — Радиотехника и электроника, 1973, **18**, № 8, с. 1579—1584.
3. Дравских А. Ф., Финкельштейн А. М. Tropospheric limitatious in phase and frequency coordinate measurements in astronomy. — Astrophys. and Space Science, 1970, v. 60, p. 251—265.
4. Тропосферные ограничения на точность радиоинтерферометрических координатных измерений при помощи частоты интерференции/А. Ф. Дравских, А. А. Стоцкий, А. М. Финкельштейн, П. А. Фридман. — Радиотехника и электроника, 1977, **22**, № 11, с. 2305—2317.
5. Метод дуг и дифференциальная астрометрия/А. Ф. Дравских, О. М. Кошелева, В. Я. Крейнович, А. М. Финкельштейн. — Письма в Астрон. журн., 1979, 5, № 8, 422—425.

Поступила в редакцию 29.05.81