

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ АНТЕНН ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ

В. М. Спитковский

Исследованы типы кривых третьего порядка, наиболее близко аппроксимирующие экспериментальные распределения облучения по отражателю антенны переменного профиля. Определены типы аппроксимирующих функций и способы их интегрирования. Приведены конкретные виды эллиптических интегралов, к вычислению которых в этом случае может быть сведена задача об определении таких параметров антенны, как ее апертурный коэффициент, коэффициент использования площади и т. д.

The types of the third-order curves were investigated which approximate closely the experimental illumination distribution over the reflector of a variable profile antenna. The types of approximating functions and the methods of the integration of these functions have been determined. Definite forms of elliptic integrals which can be used for the determination of the antenna parameters (the aperture coefficient, efficiency factor, etc.) are given.

В статье «Об аппроксимации распределения облучения по отражателю антенны переменного профиля кривыми высших порядков» [1] изложена методика отбора из всей совокупности кривых третьего порядка некоторых их классов, позволяющих с заданной точностью аппроксимировать распределение амплитуды поля по отражателю антенны переменного профиля (АПП).

В данной работе исследуется возможность нахождения конкретных типов аппроксимирующих кривых, исходя из соображений их максимального графического соответствия заданным распределениям.

Распределение облучения по отражателю АПП, вообще говоря, может быть как симметричным, так и асимметричным. Пригодность или непригодность тех или иных линий третьего порядка для аппроксимаций из соображений асимметрии может быть установлена исследованием диаметральных характеристик кривых K_3 , например из наличия и числа диаметров у линии третьего порядка.

Диаметр Ньютона (геометрическое место центров средних расстояний точек пересечения кривой K_3 с системой параллельных хорд) для K_3 есть прямая

$$(A - 2Bm + Cm^2)x + (B + 2Cm + Dm^2)y + E + 2Fm + Gm^2 = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2m \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Из (1) можно определить зависимость между угловым коэффициентом m сопряженных хорд и угловым коэффициентом k диаметра

$$A - 2Bm + Cm^2 + k(B + 2Cm + Dm^2) = 0. \quad (3)$$

При $km = -1$ диаметр является осью кривой K_3 . Такие типы кривых K_3 пригодны для аппроксимации симметричных распределений. Кривые с $km \neq -1$ могут быть применены для аппроксимации асимметричных распределений. Диаметры линии K_3 , заданные в однородных координатах [1], сопряжены с хордами углового коэффициента m , который может быть найден среди общих корней системы уравнений [2]

$$\begin{cases} A_{111} + 3A_{112}m + 3A_{122}m^2 + A_{222}m^3 = 0, \\ \begin{vmatrix} A_{111} + A_{112}m & A_{112} + A_{122}m & A_{113} + A_{123}m \\ A_{112} + A_{122}m & A_{122} + A_{222}m & A_{123} + A_{223}m \\ A_{113} + A_{123}m & A_{123} + A_{223}m & A_{133} + A_{233}m \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Переписывая второе уравнение из (4) при помощи миноров, получим

$$\bar{A}_{111} + 3\bar{A}_{112}m + 3\bar{A}_{122}m^2 + \bar{A}_{222}m^3 = 0. \quad (5)$$

В [2] доказывалось, что существование и число диаметров линии K_3 будут обусловлены значением дефекта δ матрицы

$$R_0 = \begin{vmatrix} 3A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 & 0 \\ 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{111} & 3A_{112} & 3A_{122} & A_{222} \\ \bar{A}_{111} & 3\bar{A}_{112} & 3\bar{A}_{122} & \bar{A}_{222} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{111} & 3\bar{A}_{112} & \bar{A}_{122} & \bar{A}_{222} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{111} & 3\bar{A}_{112} & 3\bar{A}_{122} & \bar{A}_{222} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Здесь \bar{A}_{ijk} — детерминант минорной матрицы третьего порядка.

Для определения значений дефекта δ матрицы нужно найти ее главный детерминант. Для этого сделаем следующие преобразования и вычисления. Из (4) и [1] следует

$$\begin{cases} a - m^2 = 0, \\ \begin{vmatrix} a + 0 & 0 - \frac{m}{3} & \frac{b}{3} + 0 \\ 0 - \frac{m}{3} & -\frac{1}{3} + 0 & 0 + 0 \\ \frac{b}{3} + 0 & 0 + 0 & \frac{c}{3} - \frac{em}{3} \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Левую часть второго уравнения из (7) перепишем окончательно в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -\frac{m}{3} & \frac{b}{3} \\ -\frac{m}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{b}{3} & 0 & \frac{c-em}{3} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Вычисляя (8) по известному правилу Сарруса для определителей 3-го порядка, получим

$$\Delta = b^2 - 3ac + 3aem - cm^2 + em^3. \quad (9)$$

Используя (5) и (9), матрицу R_0 можно переписать в виде

$$R_0 = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & -1 & 0 \\ b^2 - 3ac & 3ae & -c & e & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 3ac & 3ae & -c & e & 0 \\ 0 & 0 & b^2 - 3ac & 3ae & -c & e \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Рядом элементарных преобразований матрица (10) может быть приведена к виду

$$R_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 - 4ac & 4ae \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2e & b^2 - 4ac \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Теперь вычислим главный детерминант D матрицы (11). Для этого воспользуемся тем, что детерминант матрицы, в которой все элементы строки или столбца, за исключением одного, нули, равен произведению элемента, не равного нулю, на его адьюнкту A_{ik} [3, 4]

$$D = a_{ik} A_{ik}. \quad (12)$$

Последовательно применяя свойство (12), в итоге получим

$$D = e(b^2 - 4ac + 4ea\sqrt{a})(b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a}). \quad (13)$$

Дефект δ матрицы R_0 определяется числом равных нулю сомножителей в (13) и соответственно может составлять

$$\left. \begin{array}{l} a \neq 0, e = 0, b^2 \neq 4ac \\ e = 0, b^2 \neq 4ac \\ e \neq 0, a = b = 0 \\ e = 0, b^2 = 4ac \end{array} \right\} \exists \delta = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2, \\ 3. \end{cases} \quad (14)$$

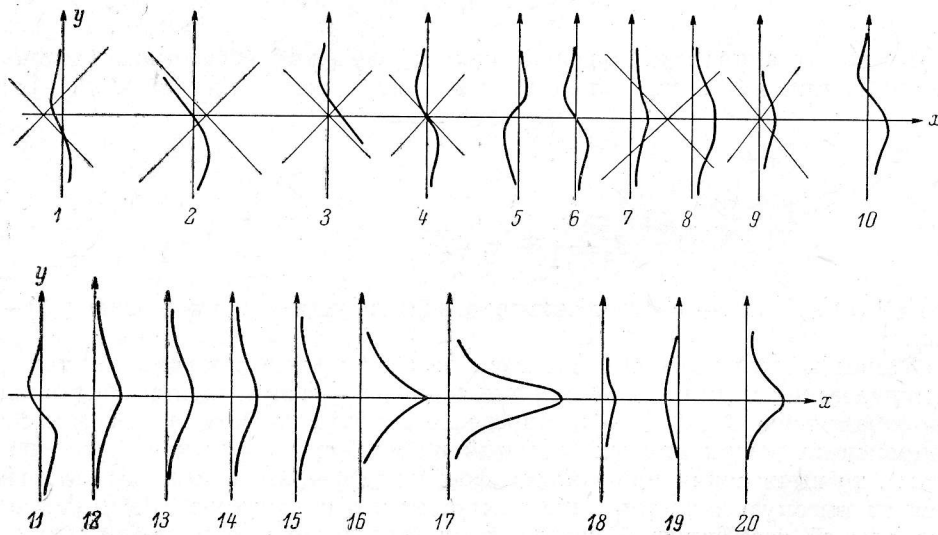
Равенство дефекта δ нулю или двум означает отсутствие диаметров у кривых K_3 . Кривые с такими δ могут быть применены для аппроксимации асимметричных распределений. Случай $\delta=2$ относится к гиперболизмам конических сечений.

При $\delta=1$ существует один диаметр — кривые K_3 и аппроксимируемые ими распределения симметричны.

Кривые с $\delta=3$, имеющие три вещественных диаметра — тридиаметральные избыточные гиперболы, — могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения как не соответствующие геометрическому характеру распределений. Аналитические выражения для аппроксимирующих функций, определенных при помощи инвариантов трилинейных кубических форм и исследования диаметральных характеристик кривых, приведены в таблице. Детальное исследование хода кривой производилось с помощью анализа соотношений между корнями соответствующего характеристического уравнения [1]. На рисунке показаны формы кривых третьего порядка, соответствующие аналитическим выражениям таблицы.

Форма кривой (см. рисунок)	Аппроксимирующая функция	Номер формулы
1, 2	$y = \frac{1}{2x} \left[-e \pm 2 \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} \right)^{1/2} \right]$	(15)
3, 4	$y = \frac{1}{2x} \left[-e \pm 2 \left(ax^4 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} \right)^{1/2} \right]$	(16)
5	$y = \frac{1}{2x} \left[-e \pm 2 \left(bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} \right)^{1/2} \right]$	(17)
6	$y = \frac{1}{2x} \left[-e \pm 2 \left(cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} \right)^{1/2} \right]$	(18)
7, 8	$y = \pm \frac{1}{x} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)^{1/2}, \quad a > 0$	(19)
9-11	$y = \pm \frac{1}{x} (ax^4 + cx^2 + dx)^{1/2}$	(20)
12-17	$y = \pm \frac{1}{x} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)^{1/2}, \quad a < 0$	(21)
18, 19	$y = \pm \frac{1}{x} (bx^3 + cx^2 + dx)^{1/2}$	(22)
20	$y = \pm \frac{1}{x} (cx^2 + dx)^{1/2}$	(23)

Методы нахождения численных значений коэффициентов уравнений аппроксимирующих кривых при графической форме задания функции подробно рассмотрены в руководствах [5] и [6].



Возможные типы аппроксимирующих кривых третьего порядка.

В [1] отмечалось, что при расчетах параметров антенных систем аппроксимируемые распределения входят в уравнения под знаком интеграла. Из вида формул (15)–(23) можно заключить, что в общем случае

интегралы от аппроксимирующих функций будут интегралами типа абелевых

$$I = \int R(x, y) dx. \quad (24)$$

Здесь R — рациональная функция по отношению к своим аргументам, а y — иррациональная функция от x

$$y = \sqrt[n]{P^s(x)}, \quad (25)$$

где $P^s(x)$ — целая рациональная функция степени s от x .

Если аппроксимирующие кривые третьей степени, то $n=2$. Функция же $P^s(x)$, как видно из таблицы, может иметь степень от второй до четвертой включительно. Для $P^s(x)$ второй степени, соответствующей аппроксимирующей кривой (23), имеем простейший интеграл рассматриваемого вида, приводимый к интегралам рациональных выражений, а именно:

$$I_1 = \int \Phi(x, \sqrt{cx^2 + dx + k}) dx, \quad (26)$$

вычисляемый при помощи подстановок Эйлера. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат для аппроксимирующей функции (23)

$$I_1 = \int \frac{t}{x} dx = t + \frac{d}{2} \int \frac{dx}{t}, \quad t = \sqrt{cx^2 + dx}, \quad (27)$$

который в зависимости от вида подстановки во втором слагаемом (27) получит вид

$$I_1 = \begin{cases} t + \frac{d}{2\sqrt{c}} \ln\left(cx + \frac{d}{2} + t\sqrt{c}\right), \\ t + \frac{d}{2\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - d}{d}. \end{cases} \quad (28)$$

У остальных аппроксимирующих функций функция $P^s(x)$ имеет степень 3 или 4, при $n=2$, что приводит к эллиптическим интегралам [9—11]

$$I_2 = \int \Phi[x, \sqrt{P^4(x)}] dx \quad (29)$$

либо

$$I_3 = \int \Phi[x, \sqrt{P^3(x)}] dx, \quad (30)$$

где $P^4(x)$ и $P^3(x)$ — соответствующие подкоренные выражения из (15)—(22).

Таким образом, задача сводится к вычислению простейших типов эллиптических интегралов. Если для заданного распределения облучения по отражателю АПП [7—8] определены коэффициенты в уравнениях аппроксимирующих кривых (удачный их подбор требует некоторого навыка), то вычисления при помощи формул (15)—(23) и (28), (30) обеспечивают высокую точность определения таких параметров АПП, как ее апертурный коэффициент, коэффициент использования площади и т. д.

С применением методики, изложенной в [1] и данной статье, были рассчитаны значения коэффициента использования площади отражателя Большого пулковского радиотелескопа на различных длинах волн [7].

Результаты, полученные путем вычислений, сравнивались с прямыми планиметрическими измерениями и дали совпадение в пределах ошибок измерений.

Литература

1. В. М. Спитковский, наст. сборник, стр. 159.
2. П. С. Соколов. Пространственные матрицы и их приложения. Физматгиз, 1961.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд. «Наука», 1966.
4. С. П. Виноградов. Основания теории детерминантов. М., 1915.
5. Л. С. Блох. Основные графические методы обработки опытных данных. Машгиз, 1951.
6. К. Липка. Graphical and mechanical computations. N. Y., 1921.
7. В. М. Спитковский, наст. сборник, стр. 174.
8. Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, Б. Г. Кузнецов, Г. В. Кузнецова, С. Э. Хайкин, «Радиотехника и электроника», № 12, 1947, 1961.
9. А. Ф. Тимофеев. Интегрирование функций. ОГИЗ, 1948.
10. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Физматгиз, 1960.
11. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. Изд. «Наука», 1964.

Ноябрь 1968 г.
